Mathématiques d'après évaluation posé dans autres groupes le 26 Avril 2024

Exercice 1 [2 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2+2} = \dfrac{e^{2x}}{e}$.

Corrigé

$$e^{x^2+2} = \frac{e^{2x}}{e} \Leftrightarrow e^{x^2+2} = e^{2x} \times e^{-1} \Leftrightarrow e^{x^2+2} = e^{2x+(-1)} \Leftrightarrow e^{x^2+2} = e^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$$

$x^2 - 2x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$, de discriminant
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$$
$\Delta < 0$ donc $x^2 - 2x + 3$ n'a pas de racine réelle.
Conclusion : **l'équation de départ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.**

Exercice 2 [3 points]

Soit (u_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n : $u_n = e^{n+1} - e^n$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

Corrigé

On a : $u_0 = e^{0+1} - e^0 = e - 1$ donc (u_n) a pour premier terme : $\boldsymbol{u_0 = e - 1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = e^{(n+1)+1} - e^{n+1} = e^{n+1} \times e - e^n \times e = e \times (e^{n+1} - e^n) = e \times u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e \times u_n$ et e est une constante donc **(u_n) est géométrique de raison e**.

Exercice 3 [10 points]

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)e^x + x + 1$ et $g(x) = (x-1)e^x + 1$.
On admet que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. **a. Étudier les variations de la fonction g.**
   b. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.
2. **Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.**

Corrigé

1. a. **variations de g**

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-1)e^x + 1$
Rappels : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^x)' = e^x$
$g'(x) = 1 \times e^x + e^x \times (x-1) + 0$
$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x - e^x$
$g'(x) = xe^x$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de x.
On a : $g(0) = (0-1)e^0 + 1 = -1 \times 1 + 1 = -1 + 1 = 0$
D'où finalement le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b. Le tableau de variation de g montre que la valeur minimale de $g(x)$ est 0, atteinte pour $x = 0$ uniquement, donc : si $x \neq 0$, $g(x) > 0$ et $g(0) = 0$, d'où le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = (x-2)e^x + x + 1}$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^x)' = e^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times (x-2) + 1 + 0$

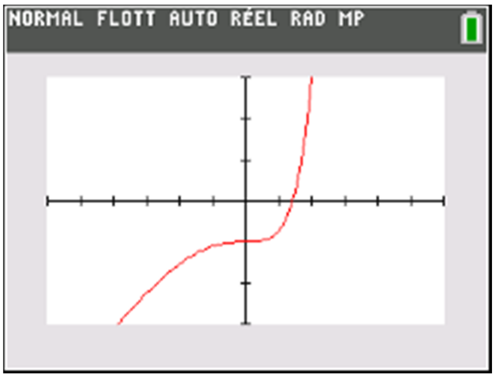
$f'(x) = [1 + (x-2)]e^x + 1$

$f'(x) = (1 + x - 2)e^x + 1$

$f'(x) = (x-1)e^x + 1$

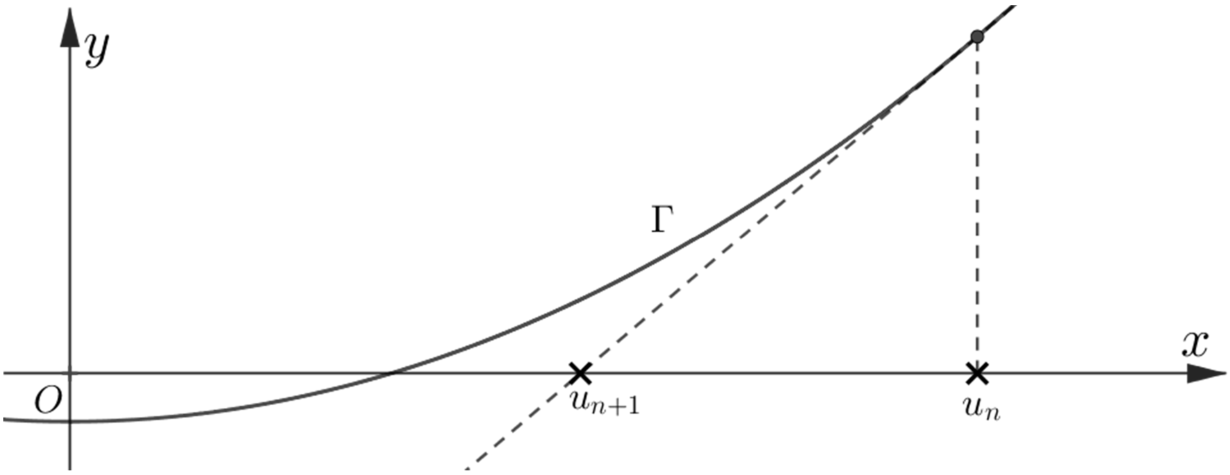
On constate que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

Or, on a vu que pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$ et $g(x)$ ne s'annule pas sur un intervalle donc $f'(x) \geqslant 0$ et $f'(x)$ ne s'annule pas sur un intervalle, par conséquent **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**



<u>Exercice 4</u> [5 points] (« version thiaude »)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2$, on note Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, (u_n) est la suite définie par son premier terme $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente à Γ au point d'abscisse u_n :



1. **Soit a un réel, donner l'équation réduite de la tangente à Γ au point d'abscisse a.**
2. **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :**

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

3. **Déterminer la valeur de u_3 sous forme de fraction.**
4. **On admet que le nombre u_n « se rapproche de plus en plus » d'une certaine constante ℓ appelée limite de la suite (u_n) et que cette limite ℓ vérifie l'égalité : $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell})$, calculer ℓ.**

<u>Corrigé</u>

1. **Soit a un réel, donner l'équation réduite de la tangente à Γ au point d'abscisse a.**

La tangente à Γ au point d'abscisse a admet pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $(cours)$.

Or, $f'(x) = 2x$ donc $f'(a) = 2a$ et $f(a) = a^2 - 2$ donc on obtient : $y = 2a(x-a) + a^2 - 2$.

$\Leftrightarrow y = 2ax - 2a^2 + a^2 - 2 \Leftrightarrow y = 2ax - a^2 - 2$.

La tangente au point de Γ d'abscisse a admet pour équation réduite : $\boldsymbol{y = 2ax - a^2 - 2}$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)}$$

La tangente d'équation $y = 2ax - a^2 - 2$ coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$:

$$2ax - a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2ax = a^2 + 2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2+2}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \times \frac{a^2+2}{a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a} + \frac{2}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

donc, pour $a = u_n$ on obtient bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

3. Déterminer la valeur de u_3 sous la forme d'une fraction.

$u_0 = 4$

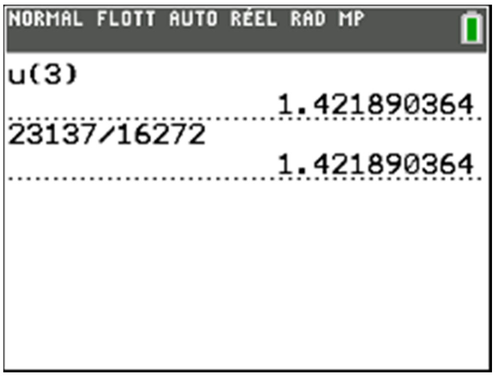
$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{2}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{2}{\frac{9}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + 2 \times \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{81}{36} + \frac{32}{36}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{113}{36} = \frac{113}{72}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2 + \frac{2}{u_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{113}{72} + 2 \times \frac{72}{113}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{113}{72} + \frac{144}{113}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{23137}{8136} = \frac{23\,137}{16\,272}$$

$$\boldsymbol{u_3 = \frac{23\,137}{16\,272}}$$

(*On pourrait démontrer que cette fraction est irréductible*)



4. On admet que le nombre u_n se rapproche de plus en plus d'une certaine constante ℓ appelée limite de la suite (u_n) et que cette limite ℓ vérifie l'égalité : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$, calculer ℓ.

Le nombre ℓ est la solution positive de l'équation :

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Pour $x \neq 0$, on a les équivalences :

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{x^2+2}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \;\; ou \;\; x = -\sqrt{2}$$

Or, $\ell > 0$, donc : $\boldsymbol{\ell = \sqrt{2}}$.